

文章编号 1004-924X(2009)12-3103-06

# 圆心不对称投影修正的相机标定

刘 泉, 苏 杭

(武汉理工大学 信息工程学院, 湖北 武汉 430070)

**摘要:**采用圆心作控制点的相机标定方法需要修正由不对称投影引起的投影误差,以提高标定精度。本文根据成像模型推导了基于直接线性变换法的投影误差计算公式。提出了先估计投影变换矩阵,直接用其元素计算空间圆在图像平面上的投影,对圆心的图像坐标进行修正后,再次计算投影变换矩阵。该方法无需矩阵分解,避免了不同坐标系的转换。模拟实验结果证明了投影误差计算公式的正确性。实际实验表明,在相机分辨率为 $780\text{ pixel}\times 582\text{ pixel}$ ,空间圆半径为 $20\text{ mm}$ 时,修正误差后的标定误差为 $0.19\text{ pixel}$ ,优于未修正时的误差 $0.20\text{ pixel}$ ,结果表明该方法可行有效。

**关键词:**相机标定;直接线性变换;投影变换矩阵;不对称投影;畸变修正

中图分类号:TP391 文献标识码:A

## Camera calibration based on correction of asymmetric circle center projection

LIU Quan, SU Hang

(School of Information Engineering, Wuhan University of Technology, Wuhan 430070, China)

**Abstract:** In order to improve the calibration accuracy, the camera calibration method using a circular center as the control point needs to correct bias errors caused by the asymmetric projection. This paper deduces the mathematical formulations of correction terms based on the Direct Linear Transform (DLT) to calculate projection errors. The perspective transform matrix is firstly estimated by using DLT method, and then the projection of the circle is obtained directly by the elements of perspective transform matrix. The circle centers in the image plane are corrected with the elements of perspective transform matrix. The proposed method eliminates the matrix decomposition and avoids the transformation between the two coordinates. Synthetic test results prove that the mathematical formulations are correct and show that the calibration error after correcting asymmetric projection is  $0.19\text{ pixel}$  in the resolutions of  $780\text{ pixel}\times 582\text{ pixel}$  and the circle radius of  $20\text{ mm}$ , which is better than  $0.20\text{ pixel}$  before the correct. The proposed algorithm is feasible and valid.

**Key words:** camera calibration; Direct Linear Transform (DLT); perspective transformation matrix; asymmetric projection; bias correction

收稿日期:2008-11-22;修订日期:2009-01-09.

基金项目:国家自然科学基金资助项目(No. 50675167)

## 1 引言

相机标定过程建立了物点空间三维坐标和相应图像二维坐标的关系<sup>[1]</sup>。现有的相机标定技术大体可分为两类<sup>[2]</sup>:经典相机标定法和自标定法。经典标定方法需要使用具有高精度标准点的参照物,通过建立标定参照物上坐标已知的控制点与其图像坐标计算相机参数,这种方法精度较高也比较稳定。

控制点图像坐标的检测精度是保证标定精度的前提之一<sup>[3]</sup>,需选择合适的控制点。根据不同环境和标定方法的需求,特征标志或控制点也可以采用不同类型。有些控制点,如直线的交点、方格块的顶点,它们的图像坐标提取对灰度阈值比较敏感,如果阈值选取的不恰当,会增加提取的难度。另一些控制点没有这类问题,如圆形或方形标志,其形心容易用重心法等获得,但用重心法求标志形心获得控制点却很少被采用,其原因是不对称投影会造成标志的变形。其重心法求得的重心并非标志圆心在图像平面上的投影。因此,在标定算法进行前,要修正由不对称投影引起的误差。Heikkila<sup>[4]</sup>提出了一种修正的方法,此方法需要先分解投影转换矩阵,计算相机内外参数的初值,如果投影转换矩阵的初值不够精确,可能会导致相机内外参数初值的巨大误差,而且该方法计算量较大。

为此,提出一种基于 DLT 模型的修正不对称投影误差的算法。采用圆心做控制点以避免阈值选择问题,在未修正误差的情况下计算投影转换矩阵的初值,再利用推导的公式计算所产生的误差,修正误差后,重新计算投影转换矩阵。实验结果证明所提出的算法是有效的,并总结了一些规律。

## 2 直线线性变换法

传统的直接线性变换法(DLT)建立了物点空间三维坐标和相应图像二维坐标间的线性关系<sup>[5]</sup>,这个方法是基于共线原则的,即物点、相机光心、和它们的成像点共线。DLT 基本公式如下

$$\begin{cases} u = \frac{l_1 x + l_2 y + l_3 z + l_4}{l_9 x + l_{10} y + l_{11} z + 1} \\ v = \frac{l_5 x + l_6 y + l_7 z + l_8}{l_9 x + l_{10} y + l_{11} z + 1} \end{cases}, \quad (1)$$

其中,  $(u, v)$  是图像坐标,  $(x, y, z)$  是空间坐标。将这个公式中的系数  $l$  组成一个  $3 \times 4$  的矩阵  $L$ , 则上式可简写为

$$\tilde{m} = L\tilde{M}, \quad (2)$$

$\tilde{m}$  和  $\tilde{M}$  分别为图像坐标和空间坐标的齐次坐标,  $L$  称之为投影转换矩阵,其最后一个元素值可暂设置为 1。

现在的线性标定法大都基于相同过程<sup>[6-7]</sup>:先估计出  $L$  矩阵的初值,再将此矩阵分解为内外参数,解出相机参数的封闭解。这类方法的一个缺点是它们没有优化搜索的过程,其中有些方法未考虑畸变,而即便是高精度相机也有畸变,所以导致标定精度不高。另一个缺点是对噪声相当敏感,如果  $L$  矩阵的初值精确度不够,可能会导致分解结果内外参数的巨大误差,其后的搜索过程也将失败。文献<sup>[8]</sup>提出将一部分相机参数的初始值事先设定好,再进行矩阵分解,但在有些情况下,某些相机参数是事先无法得知的,这样上述方法也就不适用了。

实际上,很多应用相机标定的场合,其最终目的是恢复物点的空间 3D 坐标并将误差控制在一定范围内,恢复物点空间 3D 坐标的过程并不一定要用到分解矩阵得到的内外参数的值。

文中采用的是一种基于 DLT 模型改进算法,对  $L$  矩阵不做分解,其后的计算直接用  $L$  矩阵的元素,以此提高精度,并减少了计算量。

## 3 修正投影误差

这一部分详细叙述了修正投影误差的算法,先讨论了选择控制点应遵循的原则,然后推导了修正误差所需的公式。

### 3.1 控制点的选择

控制点的图像坐标可用手动或自动检测算法方法获得。采用自动检测算法的前提是图像是二值图像,所以从相机所获得的灰度或彩色图像必须先转换成二值的。这种转换也就是对图像用阈值法进行分割,而阈值法对所选取的阈值很敏感。不合适的阈值可能加大检测控制点的难度。

本文选用圆心作为控制点,由于圆是中心对称的图形,圆心的检测对灰度阈值不是很敏感,但它却带来另一个问题。一般投射投影不是保形转换,只有直线的投影还是直线。对于投影面积非零的二维(三维)物体,如果不与图像平面平行,就会产生投影畸变。任意形状包括圆形都是如此。如果用圆心做控制点,为了使标定结果达到一定精度,必需考虑投影畸变的影响,并修正此误差。

下面推导了采用 DLT 模型的标定算法时不对称投影误差的修正公式,注意到以下公式都是基于 DLT 的,如果采用其它模型,以下公式需变形后才能使用。

### 3.2 不对称投影误差的修正

如图 1 所示,  $\Gamma_1$  为空间圆标志所在的平面,  $B_1$  是该圆的轮廓,  $C_1$  是该圆中心,  $\Gamma_2$  是图像平面, 如果  $\Gamma_1$  和  $\Gamma_2$  不平行, 则  $B_1$  投影到图像平面

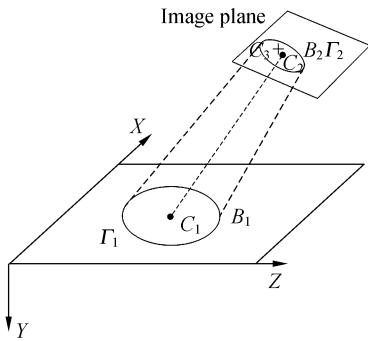


图 1 投影模型

Fig. 1 Projection model

的曲线就会产生不对称形变, 变成一椭圆, 其边界为  $B_2$ , 用重心法求出的  $B_2$  的中心  $C_3$  并非原标志  $B_1$  中心在图像平面上的投影  $C_2$ 。为了简便起见, 世界三维坐标的  $XOZ(YOZ)$  选择与标定(空间)圆平面平行, 令  $C_1$  的世界坐标为  $(x_0, y_0, z_0)$ , 则曲线  $B_1$  在世界中的表达式为

$$\begin{cases} (x-x_0)^2 + (z-z_0)^2 = R^2 \\ y = y_0 \end{cases}, \quad (3)$$

参数  $R$  为圆的半径。根据(1)式可得  $C_1$  的投影  $C_2$  的图像坐标为

$$\begin{cases} u_0 = \frac{l_1 x_0 + l_2 y_0 + l_3 z_0 + l_4}{l_9 x_0 + l_{10} y_0 + l_{11} z_0 + l_1} \\ v_0 = \frac{l_5 x_0 + l_6 y_0 + l_7 z_0 + l_8}{l_9 x_0 + l_{10} y_0 + l_{11} z_0 + l_1} \end{cases}, \quad (4)$$

与 Heikkila<sup>[8]</sup>提出的方法不同的是, 无需将(3)式从世界坐标转换到相机坐标<sup>[9]</sup>, 因此减少了

计算量。为了得到  $B_2$  的曲线表达式, 将(1)式进行变形可得

$$\begin{cases} x = (a_1 u + b_1 v + c_1) / (a_3 u + b_3 v + c_3) \\ z = (a_2 u + b_2 v + c_2) / (a_3 u + b_3 v + c_3) \end{cases}, \quad (5)$$

其中

$$\begin{aligned} a_1 &= -[l_7 - l_8 l_{11} + (l_7 l_{10} - l_6 l_{11})y], \\ b_1 &= -[-l_3 + l_4 l_{11} + (l_2 l_{11} - l_3 l_{10})y], \\ c_1 &= -[l_3 l_8 - l_4 l_7 + (l_3 l_6 - l_2 l_7)y], \\ a_2 &= -[-l_5 + l_8 l_9 + (l_6 l_9 - l_5 l_{10})y], \\ b_2 &= -[l_1 - l_4 l_9 + (l_1 l_{10} - l_2 l_9)y], \\ c_2 &= -[l_4 l_5 - l_1 l_8 + (l_2 l_5 - l_1 l_6)y], \\ a_3 &= l_7 l_9 - l_5 l_{11}, b_3 = l_1 l_{11} - l_3 l_9, c_3 = l_3 l_5 - l_1 l_7. \end{aligned}$$

将(5)代入(3), 则曲线  $B_2$  在图像平面中的表达式为:

$$(a_4 u + b_4 v + c_4)^2 + (a_5 u + a_5 v + c_5)^2 = R^2 (a_3 u + b_3 v + c_3)^2, \quad (6)$$

其中  $a_4 = a_1 - x_0 a_3, b_4 = b_1 - x_0 b_3, c_4 = c_1 - x_0 c_3,$   
 $a_5 = a_2 - z_0 a_3, b_5 = b_2 - z_0 b_3, c_5 = c_2 - z_0 c_3.$

根据解析几何中求重心的公式, 可得  $C_3$  的图像坐标:

$$\begin{cases} u_c = \frac{m_2 m_6 - m_3 m_5}{m_2 m_4 - m_1 m_5} \\ v_c = \frac{m_1 m_6 - m_3 m_4}{m_1 m_5 - m_2 m_4} \end{cases}, \quad (7)$$

其中,  $m_1 = a_4^2 + a_5^2 - R^2 a_3^2, m_2 = a_4 b_4 + a_5 b_5 - R^2 a_3 b_3, m_3 = -(a_4 c_4 + a_5 c_5 - R^2 a_3 c_3), m_4 = m_2,$   
 $m_5 = b_4^2 + b_5^2 - R^2 b_3^2, m_6 = -(b_4 c_4 + b_5 c_5 - R^2 b_3 c_3).$

一般情况下,  $(u_c, v_c)$  和  $(u_0, v_0)$  并非同一点, 因此它们之差就可以作为误差的修正量。

$$\begin{cases} u_d = u_c - u_0 \\ v_d = v_c - v_0 \end{cases}, \quad (8)$$

$$d = u_d^2 + v_d^2. \quad (9)$$

式(9)即为投影误差。而后采用递归的方法去修正该误差, 即先用重心法求得的图像坐标去求  $L$  矩阵, 再利用(7)求其实际的空间圆心投影, 然后用修正后的圆心坐标再次计算  $L$  矩阵, 直到式(9)不再变化为止。

## 4 实验和分析

本节将上述修正方法应用于仿真数据和拍摄图片, 以考察各参数与投影误差式(9)间的关系, 以及修正该误差对精度的提高。

#### 4.1 仿真实验

为了统一仿真数据和拍摄图片中的数据单位,对式(9)做了调整:

$$d = (u_d^2 + v_d^2) / d_x. \quad (10)$$

上式中的  $d_x$  为水平像元间距,并假定仿真实验中,垂直像元间距  $d_y = d_x$ ,图像坐标的两坐标轴垂直,调整后投影误差  $d$  的单位变为像素。

进行仿真实验时,首先需构造投影变换矩阵  $L$ ,可采用下列方法构造:

(1) 设定相机内外参数的值,具体如下:

表 1 相机参数设定

Tab.1 Camera parameters setting

像元间距 $d_x/mm$	0.008 3
有效焦距 $f/mm$	11.6
图像中心 $(x_c, y_c)/mm$	(3.237, 2.453)
外方位角元素 $(\varphi, \omega, \kappa)$	(30°, 0°, 0°)
外方位直线元素 $(T_x, T_y, T_z)/mm$	(0, 0, 1 000)

以上参数值在不违背实际情况的条件下可随意选取;

(2) 计算内部参数矩阵

$$L_{IN} = \begin{bmatrix} f & 0 & x_c \\ 0 & f & y_c \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (11)$$

计算旋转矩阵  $R$  和平移矩阵  $T$ ;

(3) 利用下式计算投影变换矩阵  $L$

$$L = \frac{1}{s} L_{IN} R [I - T]. \quad (12)$$

上式中,  $I$  为单位矩阵,  $s$  为比例因子。

基于投影误差数学模型式(10),仿真实验从以下几个方面考察投影误差  $d$  与空间圆方位参数关系:

(1) 改变空间圆所在平面与图像平面的夹角  $\theta$

空间圆半径固定为 20 mm,空间圆所在平面与图像平面的距离固定为 1 000 mm,投影误差随空间圆所在平面和图像平面的夹角的变化趋势并不是单调的,在夹角约 40°时,投影误差出现极大值,而当夹角为 0°时,也即两平面平行时,投影误差为 0,该情况符合前面的分析。

(2) 改变空间圆圆心与图像平面的距离  $D$

空间圆半径固定为 20 mm,空间圆所在平面

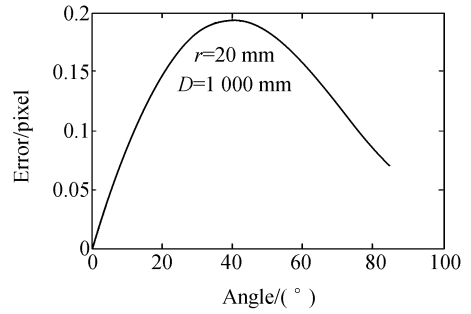


图 2 夹角变化时投影误差曲线图

Fig. 2 Projection error curve as the angle increasing

与图像平面的夹角固定为 30°,考察了距离从 1 000 mm到 1 600 mm 时投影误差的变化情况。从图 3 中可看出,投影误差随着距离  $D$  的增加而减少,最大值约 0.27 pixel,而最小值只有不到 0.14 pixel。

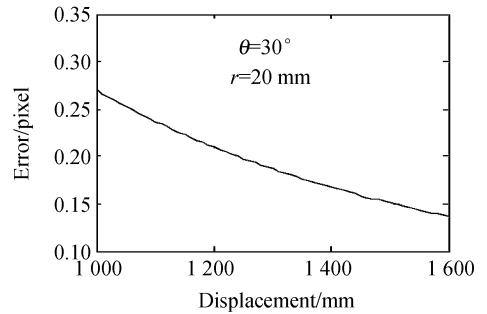


图 3 距离变化时投影误差曲线图

Fig. 3 Projection error curve as the distance increasing

(3) 改变空间圆半径的长度  $r$

空间圆所在平面与图像平面的夹角固定为 30°,空间圆所在平面与图像平面的距离固定为 1 000 mm,改变空间圆的半径长度,从 10 mm 到 50 mm。如图 4 所示,投影误差随着距离  $r$  的增

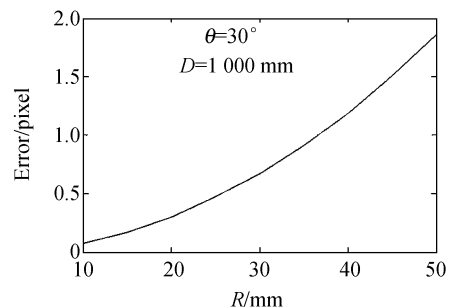


图 4 半径变化时投影误差曲线图

Fig. 4 Projection error curve as the radius increasing

加而增加,而且增加幅度明显,从不到 0.1 pixel 增加到接近 1.9 pixel,由此可看出,投影误差值对半径长度比较敏感。

为简便起见,以上误差值的计算,均未考虑到相机的径向畸变的影响。需要指出的是,图中所示的曲线只是反应了投影误差的变化规律和趋势,当相机参数值或空间圆位置改变时,具体的实验数据也随之变化。

#### 4.2 实际实验

实际实验中采用 CCD 相机对模版拍摄以验证文中提出算法的有效性<sup>[10]</sup>。该 CCD 相机型号为 BASLER A312f,分辨率 780 pixel×582 pixel,图像传感器大小为 6.49 mm×4.83 mm。标定模版为二维模版,有两个相互垂直的平面,其上贴有由激光打印机打印的标志圆,半径长度为 20 mm,如图 5 所示,图中圆心坐标的检测可采用重心法或 Hough 变换法。

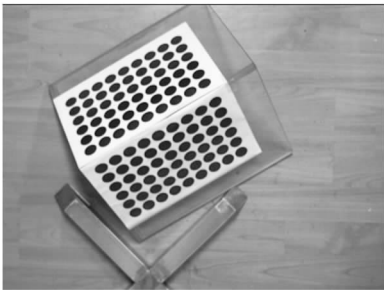


图 5 实际实验所用图片

Fig. 5 An real image for experiments

为了测试所提算法对相机标定精度的影响,我们做了两组实验,其中标定算法均采用前文所述的方法,即直接求投影转换矩阵,不对它进行分解。由于采用的不是高精度的工业用相机,标定过程中都考虑了径向畸变, $L$  的最后一个系数为径向畸变系数。所不同的是,前一组实验采用从

图像中直接检测到的圆心,后一组采用做了投影误差修正的圆心。其实验比较结果如表 2 所示。

表中的误差是控制点的真实图像坐标与其再投影后的图像坐标之间的均方根距离,。可以看出,修正投影误差后,标定精度提高了,但提高幅度并不明显,原因有两点:(1)实验所使用的相机分辨率并不高;(2)实验所用的空间圆的半径长度仅为 20 mm,根据仿真实验的结果,此时的误差并不大。

表 2 实验结果比较

Tab. 2 Comparisons of the experiment results

		未修正圆心			
$L$	$10^{-3} \times$	-3.167	3.770	-8.682	-3.767
		-8.301	3.382	4.070	-1.769
		0.509	0.538	0.263	0.423
误差/pixel		0.20			
		修正圆心			
$L$	$10^{-3} \times$	-3.140	3.771	-8.697	-3.766
		-8.266	3.376	4.039	-1.769
		0.504	0.532	0.273	-0.270
误差/pixel		0.19			

## 5 结 论

文中给出了一种基于 DLT 模型采用圆心做控制点的相机标定法。该方法无需分解矩阵求相机参数,以避免由于矩阵初值不精确导致相机参数误差较大,直接利用矩阵元素修正投影误差,大大减少了计算量。实验分析了投影误差大小与空间圆系数的关系,实际实验结果证明该方法提高了标定精度,在相机分辨率为 780 pixel×582 pixel,空间圆半径为 20 mm 时,修正误差后的标定误差为 0.19 pixel,优于未修正的结果。

#### 参考文献:

[1] TSAI R Y. A versatile camera calibration technique for high-accuracy 3D machine vision metrology using off-the-shelf cameras and lenses [J]. *IEEE Journal of Robotics and Automation*, 1987, 3(4): 323-344.

[2] 邱茂林,马颂德,李毅. 计算机视觉中摄像机定标综述[J]. *自动化学报*, 2000, 26(1): 44-55.

QIU M L, MA S D, LI Y. Overview of camera calibration for computer vision [J]. *Acta Automatica Sinica*, 2000, 26(1): 44-55. (in Chinese)

[3] LAVEST J M, VIALA M, DHOME M. Do we really need an accurate calibration pattern to achieve a

- reliable camera calibration[C]. *European Conf. on Computer Vision, Berlin: Springer*, 1998:158-174.
- [4] HEIKKILA J. Geometric camera calibration using circular control points[J]. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 2000, 22(10):1066-1077.
- [5] ABDEL-AZIZ Y I, KARARA H M. Direct linear transformation into object space coordinates in close-range photogrammetry [C]. *Proc. Symp. Close-Range Photogrammetry, Urbana: University of Illinois Urbana Champaign*, 1971:1-18.
- [6] MELEN T. *Geometrical modeling and calibration of video camera for underwater navigation* [D]. Norway: Norwegian University of Science and Technology, 1994.
- [7] 陈刚, 车仁生, 叶东. 一种基于立体模版的双目视觉传感器现场标定方法[J]. *光学 精密工程*, 2004, 12(6):626-631.
- CHEN G, CHE R SH, YE D. Stereo vision sensor field calibration method based on volume templat [J]. *Opt. Precision Eng.*, 2004, 12(6):626-631. (in Chinese)
- [8] HEIKKILA J, SILVEN O. A four-step camera calibration procedure with implicit image correction [C]. *IEEE Computer Society Conference on Computer Vision and Pattern Recognition, San Juan, Puerto Rico*, 1997:1106-1112.
- [9] 吴国栋, 宋丹. 测绘相机坐标系与立方镜转换矩阵的标定[J]. *光学 精密工程*, 2007, 15(11):1727-1730.
- WU G D, SONG D. Calibration of mapping camera and cubic prism coordinate system[J]. *Opt. Precision Eng.*, 2007, 15(11):1727-1730. (in Chinese)
- [10] 吴国栋, 韩冰, 何煦. 精密测角法的线阵 CCD 相机几何参数实验室标定方法[J]. *光学 精密工程*, 2007, 15(10):1628-1632.
- WU G D, HAN B, HE X. Calibration of geometric parameters of line-array CCD camera based on exact measuring angle in lab [J]. *Opt. Precision Eng.*, 2007, 15(10):1628-1632. (in Chinese)

#### 作者简介:



刘 泉(1963—),女,博士,教授,博士生导师,1985年于华中工学院获得学士学位,1991年于武汉理工大学获得硕士学位,主要从事图像处理、三维坐标测量、信息安全技术理论与应用方法等方面的研究。E-mail: quanliu@whut.edu.cn



苏 杭(1984—),女,博士研究生,2008年于武汉理工大学获得硕士学位,主要从事机器视觉、非线性信号处理和检测等方面的研究。E-mail: suhang9908@163.com

(本栏目编辑:白雨虹)